

Notes du chapitre II

Intégrales de convolution et de corrélation

David Savéry

Version du 12 février 2002

Résumé

Ces notes correspondent aux exposés oraux portant sur le deuxième chapitre du cours ELE3700. On introduit dans ce chapitre la convolution des signaux pour le filtrage, et la notion de corrélation afin de comparer deux signaux. On insistera en premier lieu sur les résultats en suivant progressivement la chronologie du cours. Les notions indispensables (formules, théorèmes, techniques) à connaître seront entourées dans le texte.

1 Introduction au filtrage linéaire invariant

1.1 Introduction

On appelle filtrage l'opération très générale qui consiste à transformer un signal d'entrée x en un signal de sortie y . C'est une notion fondamentale en analyse et traitement des signaux puisque chaque étage d'une chaîne de mesure, transmission, amplification, distorsion, réception peut être vu un filtrage de l'information d'entrée. Lorsque l'on observe la physique des systèmes mis en jeu (propagation d'onde, électronique sous-jacente, ...), il est souvent suffisant de considérer que les filtres rencontrés sont *linéaires* et *invariants*. Ce cours nous permet d'aborder les propriétés de ce type de filtrage et de l'associer à l'intégrale de convolution. On introduit en particulier la notion de réponse impulsionnelle qui permet de caractériser complètement un filtre linéaire invariant.

1.2 Convolution

1.2.1 Définition

Soient deux signaux suffisamment réguliers x et y , alors on construit un troisième signal noté¹ $x * y$ et dit *produit de convolution* x et de y dont l'expression est donnée par :

$$\boxed{[x * y](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau.}$$

1. Pour simplifier certaines écritures, on utilisera parfois la notation abusive $x(t) * y(t)$

Avant d'établir les caractéristiques principales du produit de convolution, on donne la propriété fondamentale qui lie le produit de convolution de x et y à leurs transformées de Laplace et de Fourier.

1.2.2 Convolution temporelle = Multiplication dans le domaine de Fourier

Supposons que x et y admettent les transformées de Laplace $X = \mathcal{L}x$ et $Y = \mathcal{L}y$, alors la transformée de Laplace de leur produit de convolution $x * y$ est simplement le produit $X.Y$, i.e.

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{L}[x * y] & = & \mathcal{L}x \mathcal{L}y \\ \mathcal{L}[x * y](s) & = & X(s)Y(s). \end{array}$$

Du fait de la relation directe existant entre la transformée de Laplace et de Fourier, on a le même résultat pour la transformée de Fourier, qui est la forme la plus utilisée en pratique :

$$\mathcal{F}[x * y] = \mathcal{F}[x] \mathcal{F}[y].$$

1.2.3 Propriétés du produit de convolution

Les propriétés de la convolution découlent de celles de la multiplication dans le domaine de Fourier. On les résume dans un tableau :

Propriétés	Domaine temporel
Commutativité	$x * y = y * x$
Linéarité	$x * (\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x * y_1 + \beta x * y_2$
Associativité	$(x * y) * z = x * (y * z)$
Élément neutre	$x * \delta = x$
Dérivation	$(x * y)' = x' * y = x * y'$
Décalage	$[x * y](t - t_0) = [x(t - t_0)] * [y(t)] = [x(t)] * [y(t - t_0)]$

Les propriétés de l'élément neutre δ et de décalage montrent que convoluer par l'impulsion de Dirac centrée en a , notée dans la suite $\delta_a(t) = \delta(t - a)$, revient à décaler un signal de a .

$$x(t - a) = \delta(t - a) * x(t) = \delta_a(t) * x(t)$$

1.3 Système linéaire invariant

1.3.1 Définition

Un filtre F est linéaire lorsque :

$$F[\alpha x + \beta y] = \alpha F[x] + \beta F[y].$$

On dit également qu'un filtre est invariant (dans le temps, ou homogène) lorsqu'il commute avec les décalages, i.e. :

$$F[x] = y \Rightarrow F[x(t - a)] = y(t - a) \Leftrightarrow F[x * \delta_a] = F[x] * \delta_a.$$

Physiquement, cela revient à dire que l'action du filtre ne dépend pas du temps. On peut donner l'exemple physique de la propagation d'une onde. On sait que les lois physiques de propagation d'une onde ne changent pas avec le temps tant que le milieu reste le même. Si on observe alors le phénomène ondulatoire en deux lieux différents, les deux signaux sont transformés l'un de l'autre par un filtre invariant.

1.4 La classe des filtres linéaires invariants

On a le théorème fondamental suivant qui permet de caractériser les filtres à la fois linéaires et invariants.

Soit un filtre linéaire F , alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) F est un filtre linéaire invariant,
- (ii) Il existe un signal h tel que $\forall x, F[x] = h * x$,
- (iii) Les exponentielles complexes $\{t \rightarrow \exp(2i\pi\nu_0 t)\}$ sont des fonctions propres de F .

Preuve :

On va montrer les trois implications suivantes : $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$

Soit x un signal quelconque, alors on peut voir x comme une superposition continue d'impulsions de Dirac puisqu'on a la relation :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0) \delta(t - t_0) dt_0.$$

Le filtre F étant linéaire, on peut calculer le signal de sortie en fonction des transformées des impulsions de Dirac :

$$F[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0) F[\delta(t - t_0)] dt_0.$$

De plus F est homogène, donc si l'on pose $h = F[\delta]$, alors $F[\delta(t - t_0)] = h(t - t_0)$. Finalement, on obtient le résultat annoncé :

$$F[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0) h(t - t_0) dt_0.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Si $y = F[x] = h * x$, alors la transformée de Fourier de y s'écrit :

$$\mathcal{F}y = \mathcal{F}h \mathcal{F}x.$$

Si x est le signal exponentiel de fréquence ν_0 , $\mathcal{F}x = \delta(\nu - \nu_0)$. Dans ce cas

$$\mathcal{F}[y](\nu) = \mathcal{F}[h](\nu) \delta(\nu - \nu_0) = \mathcal{F}[h](\nu_0) \delta(\nu - \nu_0).$$

Dans le domaine temporel, cette dernière égalité revient à $F[e^{2i\pi\nu_0 t}] = \mathcal{F}h(\nu_0) e^{2i\pi\nu_0 t}$. Les exponentielles harmoniques sont donc des fonctions propres de F .

$(iii) \Rightarrow (i)$

Appelons $\hat{H}(\nu_0)$ les valeurs propres associées aux vecteurs propres $\{t \rightarrow \exp(2i\pi\nu_0 t)\}$. Soit x un signal quelconque. On utilise alors la décomposition de x donnée par la transformée inverse de Fourier :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu.$$

On utilise la linéarité et les valeurs propres $\hat{H}(\nu_0)$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}
F[x(t)] = y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) F[e^{2i\pi\nu t}] dt. \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) \hat{H}(\nu) e^{2i\pi\nu t} dt.
\end{aligned}$$

La transformée de Fourier de y est donc $\nu \rightarrow X(\nu)\hat{H}(\nu)$. Il nous faut alors montrer que F est un filtre invariant. Ce qui est immédiat puisque :

$$\mathcal{F}\left[F[x(t-t_0)]\right](\nu) = \hat{H}(\nu)(X(\nu)\exp(-2i\pi\nu t_0)) = \left(\hat{H}(\nu)X(\nu)\right)\exp(-2i\pi\nu t_0).$$

Ce qui revient dans le domaine temporel à l'égalité attendue : $F[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$.

1.5 Caractérisation des filtres linéaires invariants

Le résultat précédent nous montre qu'un filtre linéaire invariant F est entièrement déterminé par le signal h nommé *réponse impulsionnelle* défini par $h = F[\delta]$. De manière équivalente, F est également caractérisé par la transformée de Laplace de h , $H(s) = \mathcal{L}h(s)$ nommée *fonction de transfert de F* , ou bien par la transformée de Fourier $H(\nu)$ de h , nommée *réponse en fréquence du filtre*. Le signal de sortie du filtre se calcule alors par :

$$y(t) = h(t) * x(t) \Leftrightarrow Y(s) = H(s)X(s) \Leftrightarrow Y(\nu) = H(\nu)X(\nu).$$

1.6 Systèmes linéaires invariants physiques

1.6.1 Filtre causal

La réalité physique nous montre qu'un effet suit toujours sa cause. Lorsqu'un système est soumis à l'impulsion $\delta(t)$, on peut donc s'attendre à ce que la réponse soit consécutive à cette impulsion, et donc qu'aucun signal ne soit observé pour $t < 0$. Un système linéaire invariant sera dit *causal* si sa réponse impulsionnelle est causale, i.e. $t < 0 \Rightarrow h(t) = 0$. Tout filtre temporel réaliste sera nécessairement causal. Dans ce cas, la fonction de transfert du filtre a une région de convergence à droite.

$$\text{Filtre causal} \Leftrightarrow h \text{ causal} \Rightarrow \mathcal{R}_h \text{ à droite.}$$

1.6.2 Filtre stable

On dit qu'un filtre est stable si à toute entrée bornée x correspond une sortie bornée y . On admettra le résultat suivant :

CNS de stabilité : Un filtre de réponse impulsionnelle h est stable si et seulement si h peut s'écrire comme une somme finie d'impulsions de Dirac et de fonctions absolument intégrables de $L^1(\mathbb{R})$.

Par conséquent, la réponse en fréquence du filtre existe bien, et la région de convergence $\mathcal{R}_h$ de la fonction de transfert $H(s)$ contient l'axe imaginaire $i\mathbb{R}$.

1.6.3 Filtre réalisable

Un filtre à la fois stable et causal est dit réalisable. D'après les propriétés précédentes, la région de convergence de la fonction de transfert d'un filtre réalisable est à droite et son abscisse de convergence est strictement négative.

On a le résultat fondamental suivant pour les filtres dynamiques (i.e. dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle) :

CNS pour qu'un filtre dynamique soit réalisable : Un filtre dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle $H(s) = N(s)/D(s)$ (filtre dynamique) est réalisable si et seulement si :

- (i) les pôles de $H(s)$ sont de parties réelles strictement négatives,
- (ii) $\text{degré}(N) \leq \text{degré}(D)$.

2 Calcul du signal de sortie et interprétation de l'intégrale de convolution

Si l'on cherche pratiquement à calculer le signal de sortie d'un filtre lorsqu'on connaît la réponse impulsionnelle et le signal d'entrée, plusieurs techniques sont à envisager pour calculer l'intégrale de convolution $y = h * x$. Il est parfois utile de se rappeler que le produit de convolution est commutatif lorsque le signal x est d'expression plus simple que h .

Technique 1 : Utiliser les propriétés de linéarité et d'invariance, en particulier lorsque x ou h est une série d'impulsions.

Technique 2 : Interpréter la convolution en terme de produit scalaire.

Supposons que l'on ait à calculer $[x * h](t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$. On peut le réécrire

$$\begin{aligned} [x * h](t) &= \int_{\mathbb{R}} x(\tau)h(-(\tau - t)) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(\tau)\phi_t(\tau)^* d\tau \\ &= \langle x, \phi_t \rangle. \end{aligned}$$

Dans cette expression le signal ϕ_t est défini par $\phi_t(\tau) = h(-(\tau - t))^*$, c'est le signal obtenu après :

- conjugaison de h (souvent h est réel, donc est son propre conjugué),
- réflexion autour de l'axe des ordonnées,
- puis décalage de t .

Technique 3 : Utiliser les transformées de Fourier ou de Laplace de x et h . En particulier si x est harmonique, sa transformée de Fourier est une impulsion de Dirac dans le domaine des fréquences.

3 Intégrales de corrélation

3.1 Introduction

En géométrie, on utilise souvent le produit scalaire pour comparer deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont de même norme, mais de directions différentes, leur ressemblance sera d'autant plus grande que leur produit scalaire sera grand, puisqu'en effet on a : $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$. Pour comparer deux signaux x et y , on peut utiliser la même approche en calculant leur produit scalaire $\langle x, y \rangle$. Cependant, les signaux ont une structure plus riche que les vecteurs de l'espace. En effet, quelquefois, deux signaux peuvent sembler semblables, alors que leur produit scalaire est nul : c'est le cas de deux signaux de même forme mais décalés en temps de telle manière que leurs supports soient disjoints. Pour quantifier ces ressemblances à une translation près, on introduit l'intégrale de corrélation dans cette section.

3.2 Définition

Soient deux signaux à valeurs réelles x et y . On définit leur fonction d'intercorrélation R_{xy} (ou $x \odot y$) par la relation suivante :

$$R_{xy}(u) = [x \odot y](u) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y(t+u) dt.$$

Lorsque les signaux x et y sont égaux, la fonction d'intercorrélation est alors appelée fonction d'autocorrélation $R_{xx} = x \odot x = R_x$:

$$R_{xx}(u) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x(t+u) dt.$$

3.3 Mesures de ressemblance

La fonction d'intercorrélation évaluée en 0 donne le produit scalaire des deux signaux d'énergie finie x et y :

$$R_{xy}(0) = \langle x, y \rangle,$$

tandis que lorsqu'on l'évalue en u , elle donne la ressemblance entre x et y décalé de $-u$ ou de manière équivalente la ressemblance entre x décalé de u et y :

$$R_{xy}(u) = \langle x, \delta_{-u} * y \rangle = \langle \delta_u * x, y \rangle.$$

De la symétrie du produit scalaire, on trouve immédiatement : $R_{xy}(u) = R_{yx}(-u)$ ainsi que la parité de la fonction d'autocorrélation $R_{xx}(u) = R_{xx}(-u)$.

3.4 Propriétés

3.4.1 Corrélation et convolution

Intercorrélation et convolution sont liées simplement² par la relation suivante :

$$R_{xy}(t) = [\tilde{x} * y](t) = x(-t) * y(t).$$

On en déduit que la transformée de Fourier de R_{xy} est alors :

$$\mathcal{F}[R_{xy}(t)](\nu) = X(-\nu)Y(\nu) = X(\nu)^*Y(\nu).$$

Et en particulier pour la fonction d'autocorrélation, on a la formule importante suivante :

$$\mathcal{F}[R_{xx}(t)](\nu) = |X(\nu)|^2 = \mathcal{E}_x(\nu).$$

Le spectre d'énergie de x est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation R_{xx} .

3.4.2 Inégalités et corrélations

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz³ à la formulation de l'intercorrélation en terme de produit scalaire on obtient :

2. Rappelons la notation $\tilde{x}(t) = x(-t)$.

3. Dans un espace euclidien, l'inégalité de Cauchy-Schwartz stipule $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$ avec égalité si et seulement si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont linéairement liés.

$$|R_{xy}(t)| \leq \|x\| \|y\|.$$

On appelle souvent le ratio $\rho_{xy}(t) = \frac{R_{xy}(t)}{\|x\| \|y\|} \in [-1, 1]$ coefficient de corrélation de x et y . En particulier, le coefficient d'autocorrélation $\rho_{xx}(t)$ atteint la limite 1 lorsque $t = 0$ puisque $R_{xx}(0) = \|x\|^2$. Le coefficient de corrélation hérite également de la parité de la fonction d'autocorrélation.